CAHIER DE VACANCES

POUR L'ENTRÉE EN 2NDE

Ce cahier a été réalisé par le Labomaths du collège La Bruyère à Osny pour vous aider à préparer votre entrée au lycée en mathématiques.

Nous vous conseillons de le faire pendant les vacances, de manière régulière sur les dernières semaines des vacances pour vous remettre en tête certaines notions et faire le point sur ce qu'il vous faut revoir.

A la fin de ce cahier, vous trouverez également quelques énigmes pour vous challenger un peu.

I Calcul

Exercice 1 : Effectuer les calculs suivants :

1) $2+(-5)-3+7+(-8)$

2) $(-1)+7-5+3+(-6)+1$

3) $(-7)\times(-9)$

4) $7\times(-3)$

5) $3{,}75\times(-0{,}01)$

6) $\frac{100\times(-0{,}1)\times(-1\,000)\times0{,}01}{(-0{,}001)\times10\times10\,000}$

7) -3^2+7

8) $-(3^2+7)$

9) $(-3)^2+7$

10) $\frac{17}{3}+\frac{4}{3}$

11) $\frac{12}{5}+\frac{1}{3}$

12) $\frac{16}{7}-\frac{15}{2}$

13) $\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}$

14) $\frac{7}{2}\times\frac{15}{7}\times5\times\frac{3}{4}$

15) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{7}}$

Exercice 2 : Ecrire les nombres suivants sous forme scientifique.

1) $1\,530\,000$ 2) $657\,400$ 3) 753 4) 0,003 5) 0,475

Exercice 3 : Ecrire les nombres suivants sous la forme a^n :

1) $(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$

2) $10^5\times10^{-3}\times10^{30}$

3) $\frac{10^7}{10^{16}}$

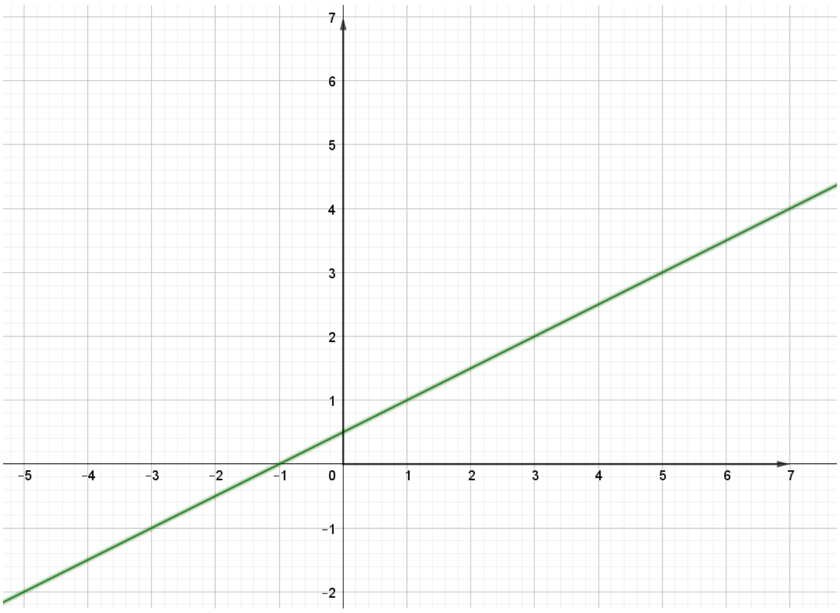
II Etudes de fonctions et résolutions d'équations

Exercice 4 : Soit la fonction f, définie par le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	3	4
$f(x)$	-5	-1	0	3	1	0	-2

1) Donner les images par f de -2 ; -1 et -3.
2) Quel(s) est/sont le ou les antécédent(s) de -2 par f ?
3) Quel(s) est/sont le ou les antécédent(s) de 0 par f ?
4) Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x) = 3$?
5) En respectant les images données par ce tableau de valeurs, tracer une courbe représentative possible pour f dans un repère du plan.

Exercice 5 : Soit une fonction, on donne sa représentation graphique dans le repère du plan ci-dessous.

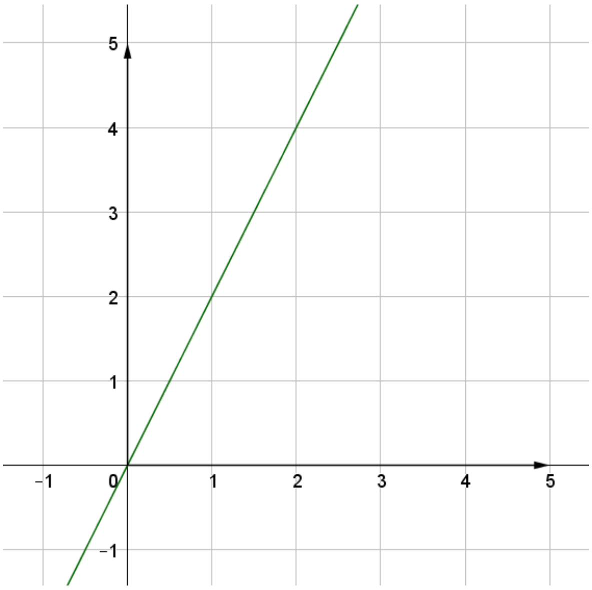


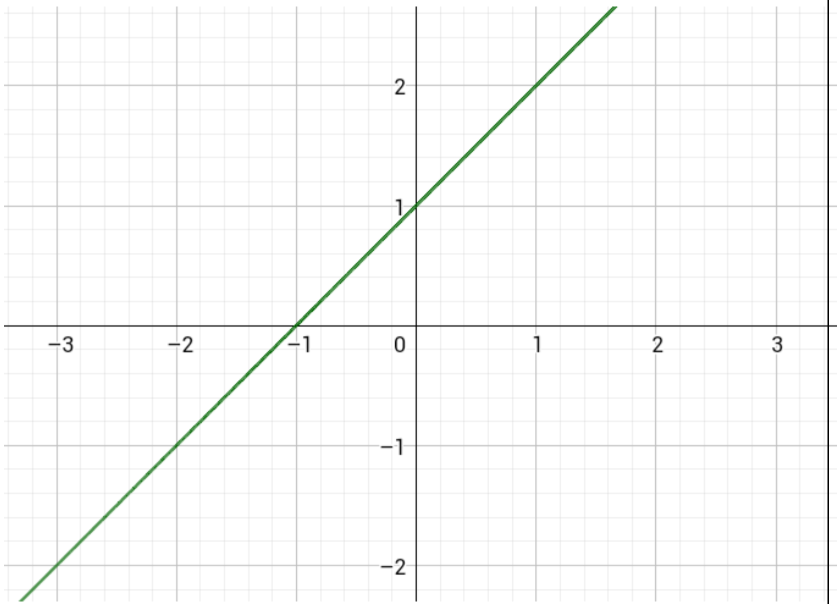
1) Quelle est l'image de 1 par f?
2) Donner le ou les antécédent(s) de $0{,}5$ par f.
3) Quelle est la valeur de $f(-1)$?
4) Quelles sont la ou les valeur(s) de x telles que $f(x) = 2$?
5) De quel type est cette fonction ?

Exercice 6 : Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x - 7$.

1) Calculer $f(5)$.
2) Déterminer l'image de 1 par f.
3) Déterminer le ou les antécédent(s) de -2 par f, c'est-à-dire les valeurs de x telles que $f(x) = -2$.

Exercice 7 : Donner l'expression en fonction de x de $f(x)$ pour les deux fonctions suivantes :





Exercice 8 : Trouver l'expression de $f(x)$ en fonction de x, sachant que la courbe de f passe par les points $(1;4)$ et $(5;3)$ dans un repère du plan et que f est une fonction affine.

Exercice 9 : Dans un repère du plan, tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

1) La fonction f définie pour tout nombre x par : $f(x) = 3x$.
2) La fonction g définie pour tout nombre x par : $g(x) = 2x - 1$.

Exercice 10 : Résoudre les équations suivantes :

1) $5x + 3 = 0$

2) $-2x + 4 = -1$

3) $(x + 5)(3x - 2) = 0$

4) $x^2 = 121$

5) $x^2 = -49$

6) $x^2 - 36 = 0$

7) $-4x^2 + 12 = 0$

Exercice 11 :

1) On considère l'expression suivante :
   $A(x) = (x-2)(x+3) - (x-2)(3x+1)$
   a) Déterminer la forme développée et réduite de $A(x)$.
   b) Déterminer une forme factorisée de $A(x)$.
   c) En utilisant la forme la plus adaptée de $A(x)$:
      - Calculer $A(5)$ et $A(\sqrt{2})$.
      - résoudre $A(x) = 0$.
2) A l'aide des identités remarquables :
   a) Développer l'expression $B(x) = (3x+7)^2$
   b) Factoriser l'expression $C(x) = x^2 - 18x + 81$

III Statistiques et probabilités

Exercice 12 : Pour chaque série statistique, calculer la moyenne, une médiane et l'étendue :

1) 15 ; 7 ; 12 ; 3 ; 16 ; 5 ; 20 ; 15 ; 7 ; 7.
2)

Valeur	5	7	10	12	15	16	19
Effectif	3	4	2	7	1	5	6

Exercice 13 : Dans le cas suivant, calculer la valeur x manquante, sachant que ce tableau est un tableau de proportionnalité.

Grandeur 1	3	5
Grandeur 2	x	10

Exercice 14 : Un produit est en soldes avec 30% de réduction. Il coûte 35 €. Quel sera le prix soldé ?

Exercice 15 : On sait qu'une voiture roule à vitesse moyenne de $120\ km/h$. Quelle sera la distance parcourue en 45 minutes ?

Exercice 16 : On tire une boule dans une urne contenant 3 boules vertes, 2 boules bleues et 7 boules jaunes.

1) Quelle est la probabilité de tirer une boule verte ?
2) Quelle est la probabilité de ne pas tirer une boule bleue ?
3) Si on tire deux fois de suite en remettant dans l'urne la première boule tirée, quelle est la probabilité de tirer deux fois de suite une boule jaune ?

IV Géométrie

Exercice 17 : On considère un triangle DEF rectangle en F, et on sait que $DE = 5\ cm$ et $DF = 4\ cm$. Calculer la valeur de FE.

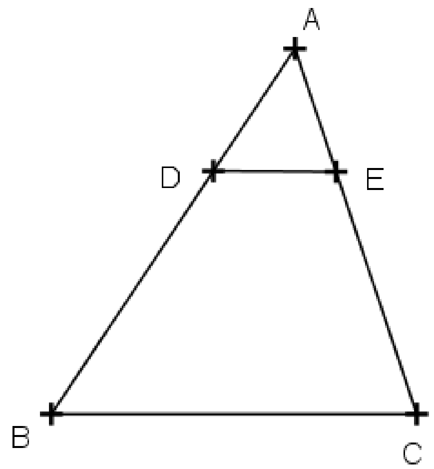
Exercice 18 : On considère un triangle GHK, tel que $GH = 2\ cm$, $GK = 7\ cm$ et $HK = 5\ cm$.
Le triangle GHK est-il rectangle ? Si oui, préciser en quel point.

Exercice 19 : Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3\ cm$ et $BC = 4\ cm$.
Calculer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$, arrondie au degré près.

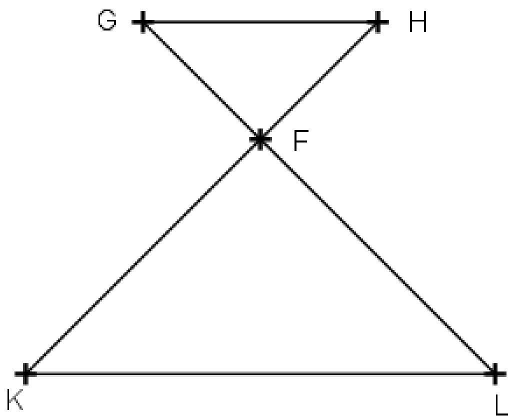
Exercice 20 : Soit ABC un trangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 41°$ et $BC = 6{,}2\ cm$.
Calculer la valeur de AC, arrondie au dixième près.

Exercice 21 : Calculer le volume d'une pyramide de hauteur $7\ cm$ et dont la base est un carré de côté $3\ cm$.

Exercice 22 : Considérons la figure ci-dessous avec $AD = 2\ cm$, $AB = 5\ cm$ et $DE = 1\ cm$. Calculer la valeur de BC sachant que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.



Exercice 23 : Considérons la figure ci-dessous, avec $GF = 3\ cm$, $FH = 2{,}5\ cm$, $FL = 9\ cm$ et $FK = 7{,}5\ cm$. Les droites (GH) et (KL) sont-elles parallèles ?



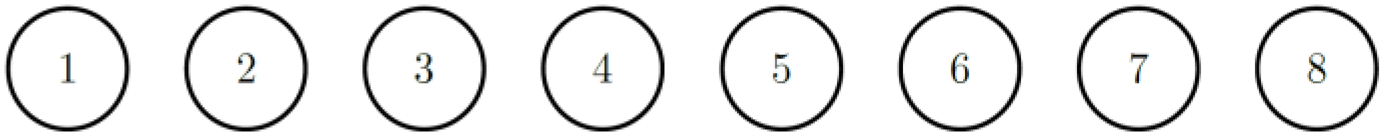
Exercice 24 :

1) Dans un repère du plan, placer les points $A(-2\,;\,-1)$, $B(4\,;\,-1)$, $C(2\,;2)$ et $D(-1\,;2)$.
2) Tracer les droites (AB) et (CD).
3) Placer les points K et H intersections respectives des droites (CD) et (AB) avec l'axe des ordonnées.
4) Par lecture graphique, donner les longueurs AB, CD et HK.
5) Calculer alors l'aire du trapèze $ABCD$.

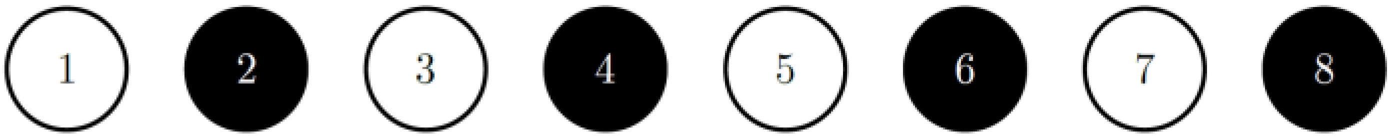
V Pour aller plus loin

Exercice 24 : Pièces blanches et noires.

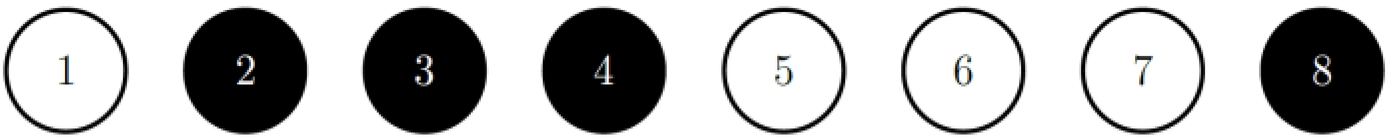
On dispose sur une table cent pièces comportant une face blanche et une face noire. Sur chaque pièce, on écrit un entier naturel, de 1 à 100 (le même entier est inscrit sur la face blanche et la face noire de la pièce). Les pièces sont alors disposées dans l'ordre des nombres inscrits sur leurs faces, face blanche vers le haut. On représente ci-dessous les 8 premières pièces au début de notre expérience.



Étape 1 :
On parcourt ensuite toutes les pièces. Si le nombre inscrit sur la pièce est un multiple de 2, alors on retourne la pièce. Sinon, on ne touche pas à la pièce. Après le premier passage, les 8 premières pièces sont donc dans la configuration suivante :



Étape 2 : On parcourt une deuxième fois toutes les pièces. Si le nombre inscrit sur la pièce est un multiple de 3, alors on retourne la pièce. Sinon, on ne touche pas à la pièce. Après ce deuxième passage, les 8 premières pièces sont donc dans la configuration suivante :



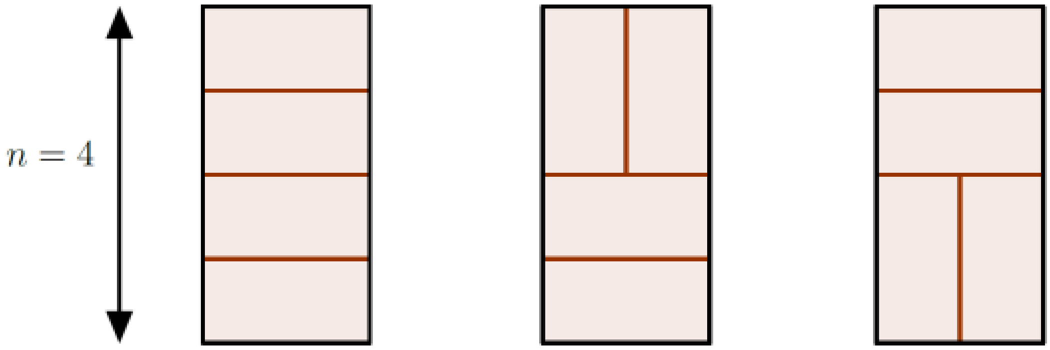
Étapes suivantes : On continue en parcourant toutes les pièces et en retournant celles qui portent un numéro qui est un multiple de 4, puis on recommence le parcours en retournant celles qui portent un numéro qui est un multiple de 5, et ainsi de suite jusqu'à retourner toutes les pièces qui portent un numéro qui est un multiple de 100.

1) Représenter la configuration des dix premières pièces après le dernier passage.

2) Si une pièce porte un numéro qui est un nombre premier, quelle est la couleur de la face visible de cette pièce après le dernier passage ?
3) Quelle est la couleur de la face visible de la pièce portant le numéro 12 après le dernier passage ? Le numéro 25 ? Le numéro 72 ? Le numéro 81 ?
4) Quelles sont les pièces qui ont la face blanche vers le haut après le dernier passage ?

Exercice 25 : Tuiles dans un rectangle.

Julie joue à un jeu qui consiste à organiser des tuiles de largeur 1 et de longueur 2, dans un rectangle de dimensions 2 et n où n est un entier naturel non nul. Elle appelle A_n le nombre de façons différentes dont elle peut organiser ces tuiles de sorte que la totalité du rectangle de dimensions 2 et n soit recouverte par les tuiles sans que ces dernières ne se chevauchent. Julie donne, par exemple, quelques manières d'organiser les tuiles si $n = 4$.



1) Déterminer A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5.
2) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer A_{n+2} (le nombre de façons d'organiser les tuiles dans un rectangle de dimensions 2 et $n+2$) en fonction de A_{n+1} (le nombre de façons d'organiser les tuiles dans un rectangle de dimensions 2 et $n+1$) et de A_n (le nombre de façons d'organiser les tuiles dans un rectangle de dimensions 2 et n).
3) Quel est le nombre de façons différentes dont Julie peut organiser les tuiles de sorte que la totalité du rectangle de largeur 2 et de longueur 12 soit recouverte par les tuiles sans que ces dernières ne se chevauchent ?

Exercices 24 et 25 tirés des *olympiades par équipes 2023* de l'académie de Versailles.